Funktionen

Allgemeines

Funktionsbegriff

Einführende Beispiele und Erklärungen
Grundwissen

Beispiele zu den wichtigen Funktionsarten des Mathematikunterrichts

Ein Lesetext – Informationen - Überblick

Datei Nr. 18001

Stand: 26. August 2016

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Vorwort

In diesem Text werden die Grundbegriffe zusammengestellt und durch Beispiele belegt.
Wichtig ist auch, dass man erkennt, wann ein Schaubild keine Funktion darstellen kann.
Dann folgen noch zur Information Beispiele zu verschiedenen Funktionstypen.

Inhalt

1 Funktionen - die Grundlagen

1.1 Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung

Wenn jemand eine Funktion ausübt, muss er etwas ausführen und es sollte ein Ergebnis geben.

Ein **Beispiel**, das etwas mit der Mathematik zu tun hat, ist die Funktion, die eine Kassiererin im Supermarkt ausübt. Sie soll berechnen, welchen Preis ich für meine Waren zu bezahlen habe, die ich in meinen Warenkorb gelegt habe. *Sie ordnet also meinem Einkauf einen Preis zu*.
Nun bin ich ein skeptischer Mensch, weil ich aus Erfahrung weiß, wie viele Fehler man in der Mathematik machen kann. Daher gehe ich nach dem Bezahlen zur Marktaufsicht und bitte um eine Kontrolle der Abrechnung. Wenn die Dame und der Kontrolleur ihre Funktion korrekt ausgeübt haben, sollte derselbe Preis herauskommen.

Die Zuordnung Einkauf $\to$ Preis **muss eindeutig sein.**

Das verlangt man von jeder **Funktion.** Es gibt Überlegungen, bei denen mehrere Ergebnisse möglich sind. Doch das nennt man dann in der Mathematik keine Funktion, sondern eine Relation.

Wenn eine Funktion f der Zahl x = 3 den Wert y = 9 zuordnet, also $f:\ 3 \to 9$,
dann drückt die Schreibweise $f(3) = 9$ dies kompakter und übersichtlicher aus.
Man liest das: "f von 3 gleich 9", was besagt, dass 9 der Funktionswert von 3 ist.

Wichtig ist, dass eine Funktion immer eine eindeutige Zuordnung sein muss. Es ist für die meisten Anwendungen absolut erforderlich, ein eindeutiges Ergebnis zu bekommen. Es kann nicht sein, dass Klaus $f(4) = 2$ als Ergebnis hat und Fritz meint $f(4) = -2$ sei richtig, und jeder hat Recht.

1.2 Grundmenge – Definitionsbereich - Wertmenge

Eine **Funktion** hat die Aufgabe, den Zahlen einer vorgegebenen **Grundmenge**, welches in der Regel die Menge **R** aller **reellen Zahlen** ist, einen Wert zuzuordnen, dieser heißt Funktionswert.

Manche Berechnungen lassen sich jedoch nicht durchführen, weil es entweder kein Ergebnis gibt, oder weil das Ergebnis keine reelle Zahl ist. Die Zahlen, zu denen man einen Funktionswert berechnen kann bilden die **Definitionsmenge** oder den **Definitionsbereich**.

Die **Menge aller Funktionswerte** zu den Zahlen des Definitionsbereichs nennt man die **Wertmenge** oder den **Wertebereich** der Funktion.

Eine Funktion ist eine Vorschrift, die Zahlen einer Grundmenge eindeutig Werte zuordnen soll. Diese bilden die Wertmenge. Die Zahlen, denen ein Wert zugeordnet werden kann, nennt man den Definitionsbereich.

MERKE: Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes angegeben ist, verwendet man als Grundmenge immer die Menge **R** der reellen Zahlen.

1.3 Ermitteln des Definitionsbereichs einer Funktion

Eine mathematische Funktion wird in der Regel durch einen Term definiert.

Dieser stellt die Berechnungsvorschrift für die Funktionswerte dar.

Beispiele :

$f(x) = 2x + 3$ (Lineare ganzrationale Funktion)

$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ (Gebrochen rationale Funktion)

$f(x) = \sqrt{4-x}$ (Wurzelfunktion)

$f(x) = e^{-x+1}$ (Exponentialfunktion)

$f(x) = \log_2(x)$ (Logarithmusfunktion)

$f(x) = \sin(x) - \frac{1}{2}x$ (Trigonometrische Funktion)

Nicht jede Funktion gestattet die Berechnung von Funktionswerten für alle reellen Zahlen. Folgende Rechenoperationen sind nicht möglich und führen daher nicht zu Funktionswerten.

Regeln zur Bestimmung von Definitionsbereichen

1. **Man kann nicht durch 0 dividieren.**

   Also kann man beispielsweise mit der Funktion $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ keinen Funktionswert zur Zahl 2 berechnen: $f(2) = \frac{\boxed{2}+1}{\boxed{2}-2} = \cancel{\frac{3}{0}}$, Hier existiert kein Ergebnis

   Definitionsbereich: $\mathbf{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

2. **Man kann aus negativen Zahlen keine Wurzeln ziehen.**

   Also kann man beispielsweise mit der Funktion $f(x) = \sqrt{4-x}$ nicht den Funktionswert zur Zahl 5 berechnen. $f(5) = \sqrt{4-\boxed{5}} = \cancel{\sqrt{-1}}$ ist keine reelle Zahl.

   Definitionsbereich: $\mathbf{D} = [\,0\,;\infty\,[$

3. **Man kann zu nicht positiven Zahlen keinen Logarithmus berechnen.**

   Also kann man beispielsweise mit der Funktion $f(x) = \log_2 x$ nicht den Funktionswert zur Zahl -4 berechnen: $f(-4) = \log_2(-4)$ ist keine reelle Zahl.

   Definitionsbereich: $\mathbf{D} =]\,0\,;\infty\,[$ 0 ist jetzt ausgeschlossen.

In manchen Aufgaben wird man nicht den maximalen Definitionsbereich verwenden sondern beschränkt sich auf eine kleinere Zahlenmenge. Dies muss dann aber aus der Aufgabe hervorgehen.

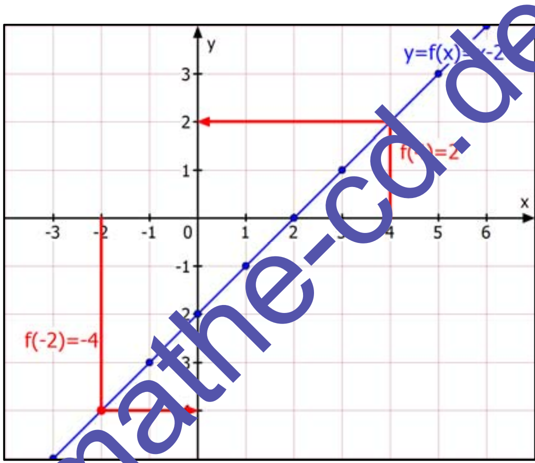
1.4 Funktion und Schaubild

Beispiel 1: Die „lineare“ Funktion f: $x \rightarrow x-2$

Sie ordnet jeder Zahl der Grundmenge $\mathbf{G}=\mathbf{R}$ einen Funktionswert zu, der um 2 kleiner ist als die Zahl selbst. Man schreibt ihre Funktionsgleichung so: $f(x)=x-2$.

Berechnung einiger Funktionswerte und Darstellung als Zahlenpaare:

Aus wird das	Zahlenpaar
$f(x)=x-2$	$(x\,\vert\,x-2)$
$f(-2)=-2-2=-4$	$(-2\,\vert\,-4)$
$f(0)=-2$	$(0\,\vert\,-2)$
$f(1)=-1$	$(1\,\vert\,-1)$
$f(2)=0$	$(2\,\vert\,0)$
$f(4)=2$	$(4\,\vert\,2)$
$f(3{,}4)=1{,}4$	$(3.4\,\vert\,1{,}4)$
$f\left(\frac{15}{7}\right)=\frac{15}{7}-2=\frac{15}{7}-\frac{14}{7}=\frac{1}{7}$	$\left(\frac{15}{7}\,\vert\,\frac{1}{7}\right)$



Alle diese Zahlenpaare bilden, wenn man sie als Punkte in einem Koordinatensystem darstellt, das Schaubild. Das Schaubild der Funktion $f(x)=x-2$ ist die **Gerade mit der Gleichung** $y=x-2$.

Die Zuordnungen kann man auch als **abgewinkelte Pfeile** in einem solchen Schaubild darstellen:

Eingetragen sind: $f:\ -2 \rightarrow -4$, also $f(-2)=-4$ und $f:\ 4 \rightarrow 2$, also $f(4)=2$

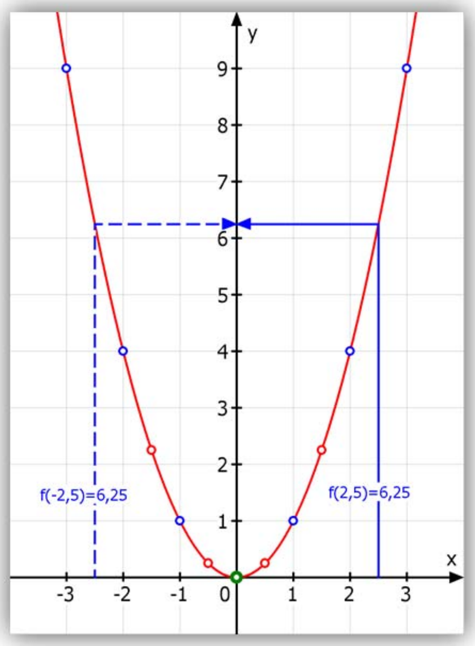
> **Die Gerade ist also die graphische Darstellung der Lösungsmenge.**
> Man sollte verstehen, dass **alle Punkte der Geraden Lösungspaare** darstellen:

Hinweis: Diese Funktion heißt **linear**, weil man ihr Schaubild mit einem Lineal zeichnen kann.

Beispiel 2 Quadratfunktionen: $f(x)=ax^2+bx+c$

Beispiel: Die **Quadratfunktion**: $f(x)=x^2$

$f(-3)=(-3)^2=9$	$(-3\,\vert\,9)$
$f(-2)=(-2)^2=4$	$(-2\,\vert\,4)$
$f(-1)=(-1)^2=1$	$(-1\,\vert\,1)$
$f(0)=0^2=0$	$(0\,\vert\,0)$
$f(1)=1^2=1$	$(1\,\vert\,1)$
$f(2)=2^2=4$	$(2\,\vert\,4)$
$f(3)=3^2=9$	$(3\,\vert\,9)$



$f(-x)$ und $f(x)$ erhalten denselben Funktionswert:

$f(-2{,}5)=6{,}25$ und $f(2{,}5)=6{,}25$

Das spiegelt sich in der <u>Symmetrie des Graphen</u> wider.

1.5 Trennung von Algebra und Geometrie – Richtig formulieren!

Man vermischt leider immer wieder Algebra und Geometrie. Daher sollte man auf Folgendes achten

(1) Eine **Funktion** ist eine eindeutige Berechnungsvorschrift. Das gehört zur **Algebra**.

(2) Aus der **Funktionsgleichung** $f(x) = x^2$ kann man die Gleichung des Schaubilds bilden. Dazu verwendet man die Funktionswerte als y-Koordinaten der Kurvenpunkte: $y = x^2$.
Als Gleichung hat sie eine **Lösungsmenge**, bestehend aus Zahlenpaaren. Stellt man diese Lösungsmenge graphisch als Schaubild (Graph, Kurve) dar, landet man in der **Geometrie**.

(3) **Der geometrische Begriff „Kurve" unterscheidet sich vom umgangssprachlichen Begriff „Kurve" deutlich.** Beispiel: Eine Gerade ist mathematisch gesehen als Schaubild einer Funktion auch eine Kurve, obwohl sie gradlinig verläuft und man sie in der Umgangssprache nicht als „Kurve" bezeichnen würde.

Merke: **$f(x) = x^2$ eine Funktionsgleichung** und **$y = x^2$ eine Kurvengleichung.**

(5) ***Ausblick:*** Die Unterscheidung zwischen Funktion und Kurve geht weiter:
Wenn die Funktionswerte zunehmen, dann steigt das zugehörige Schaubild.
Wenn die Zunahme der Funktionswerte größer wird, dann zeigt die Kurve Linkskrümmung, wenn die Zunahme der Funktionswerte kleiner wird, dann zeigt der Graph Rechtskrümmung.
Wenn eine Funktion einen maximalen Wert annimmt, hat die Kurve einen Hochpunkt usw.
Hier muss man die algebraische Begriffsbildung von der geometrischen sauber trennen.
Mehr dazu kann man im Text 41120 (ab Seite 20) nachlesen.

(6) Eine oft gestellte Aufgabe ist es, die Nullstellen einer Funktion zu berechnen. Dazu meint man die Zahlen, deren Funktionswert 0 ist. Wenn also f(4) = 0 ist, dann ist 4 eine Nullstelle von f.

Der zugehörige Kurvenpunkt hat die Koordinaten $N(4\,|\,0)$. Er liegt auf der x-Achse. Daher ist er ein Schnittpunkt des Schaubilds mit der x-Achse.

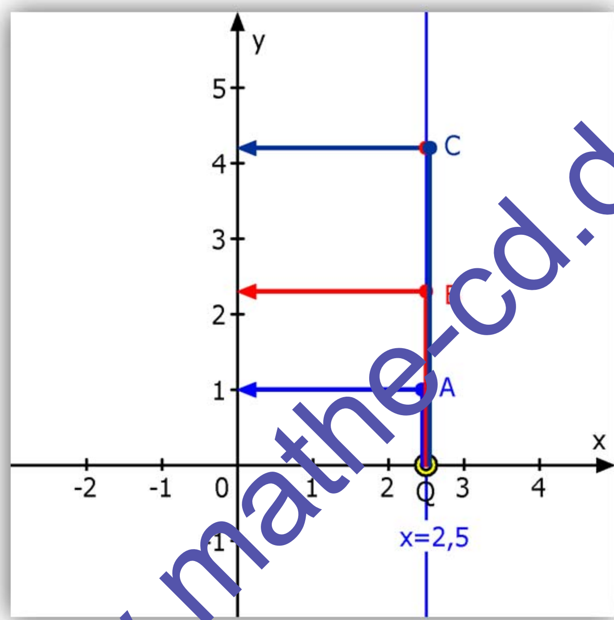
Also entsprechen sich die Begriffe „Nullstelle einer Funktion" und „Schnittpunkt des Graphen mit der x-Achse". Man darf sie aber nicht vermischen.
Eine falsche Aussage ist diese: Die Funktion schneidet die x-Achse bei 4.
(Eine Funktion hat keine Schnittpunkte: Funktion ist Algebra, Schnittpunkt Geometrie.)
Eine falsche Aussage ist diese: Die Nullstelle der Kurve ist 4.
(Kurven haben Punkte, keine Nullstellen, diese gehören zu Funktionen.)

Also Vorsicht: Man darf funktionale (= algebraische) Begriffe nicht mit geometrischen verstricken.

2 Beispiele für „keine Funktionen“

2.1 Eine Parallele zur y-Achse ist kein Schaubild einer Funktion

Die Abbildung zeigt die Gerade mit der Gleichung x = 2,5.



Weil y nicht in dieser Gleichung (die ja eine Bedingung für die Punkte der Geraden darstellt) vorkommt, darf y beliebig gewählt werden.
Also liegen alle Punkte $P(2{,}5\,|\,y)$ mit beliebigem y-Wert auf dieser Geraden.

Daher ist jede Gerade mit einer Gleichung der Form $x = c$ eine Parallele zur y-Achse.

Sie kann jedoch nie Schaubild einer Funktion sein, wie diese Abbildung zeigen soll:

Ich will der Zahl x = 2,5 einen Funktionswert zuordnen:

(a) Dazu gehe ich von Q auf der x-Achse um1 nach oben bis A und dann nach links bis zur y-Achse. Jetzt habe ich (blauer Pfeil) die Zuordnung $2{,}5 \to 1$ eingetragen.

(b) Gehe ich von Q bis zum Punkt $B(2{,}5\,|\,2{,}3)$ und dann nach links zur y-Achse (roter Pfeil), dann habe ich die Zuordnung $2{,}5 \to 2{,}3$ eingetragen.

(c) Gehe ich von Q bis zum Punkt $C(2{,}5\,|\,4{,}2)$ und dann nach links zur y-Achse (roter Pfeil), dann habe ich die Zuordnung $2{,}5 \to 4{,}2$ eingetragen.

usw.

Wir haben also jetzt bereits drei Zuordnungen:

$$2{,}5 \begin{array}{l} \nearrow 1 \\ \rightarrow 2{,}3 \\ \searrow 4{,}2 \end{array}$$

Man erkennt, dass keine eindeutige Zuordnung mehr vorliegt.
Also gehören diese Zuordnungen nicht mehr zu einer Funktion.